ВВЕДЕНИЕ. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ДИСЦИПЛИНЫ

Все математические дисциплины можно условно разделить на *дискретные* и *непрерывные*. Дискретная математика – это та часть математики, главной особенностью которой является изучение отдельных объектов, без привлечения понятия непрерывности, т.е. дискретность – это антипод непрерывности. В дискретной математике отсутствует понятие предельного перехода, присущее классической, «непрерывной» математике. Она занимается изучением дискретных структур, которые возникают как внутри математики, так и в ее приложениях. Однако она зародилась в глубокой древности, раньше, чем непрерывная математика, хотя особую значимость приобрела только в последние десятилетия, в связи с повсеместным внедрением в практику информационных технологий.

Таким образом, в широком смысле дискретная математика включает в себя все разделы математики, в которых не используются топологические методы, в частности понятие непрерывности. Это – все разделы алгебры, математическая логика, почти вся теория чисел (в том числе всевозможные компьютерные арифметики), многие разделы экономико-математических методов, комбинаторика и многие другие дисциплины. В более узком смысле дискретная математика – это те разделы математической логики, алгебры, теории чисел и математической кибернетики, которые непосредственно составляют теоретический фундамент информатики. В этом узком смысле дискретная математика включает в себя теорию булевых функций и их минимизацию, теорию графов и многие разделы теоретической кибернетики, теорию автоматов и формальных грамматик, комбинаторику, теорию алгоритмов (в том числе теорию сложности вычислений), криптографию и теорию кодирования.

Некоторые из вышеперечисленных разделов имеют не только многочисленные «внутренние» (с точки зрения специалиста по информационным системам или вычислительной техники) приложения, используемые, к примеру, при построении различных дискретных устройств, в программировании и т.д., но их результаты и методы применяются также при решении многих нужных для практики задач. Например, при рассмотрении транспортных задач, для нахождения оптимальных решений в управлении, для выделения «узких мест» при планировании и разработке проектов, при составлении оптимальных расписаний, а также при моделировании сложных технологий и процессов различной природы.

Целью изучения дисциплины является ознакомление студентов с системой понятий и некоторыми наиболее важными в приложениях методами теории множеств, математической логики, теории булевых функций и теории графов. Знания и навыки, полученные при ее изучении, используются в дисциплинах: «Информатика», «Программирование», «Структуры и алгоритмы обработки данных в ЭВМ», «Базы данных», «Экспертные и интеллектуальные системы» и т.д. Но в особенности знания по дискретной математике пригодятся при изучении дисциплин, связанных с функциональным и логическим программированием, кодированием и защитой информации.

Основная задача состоит в том, чтобы будущие специалисты чётко освоили основные понятия и приёмы работы с булевыми функциями и графами: построение таблиц значений; поиск и исключение фиктивных переменных; приведение булевых функций к стандартной форме (д.н.ф., к.н.ф., многочлен Жегалкина); основные методы минимизации булевых функций; построение диаграммы (рисунка) графа по его матрицам смежности и инцидентности и обратная задача; установление изоморфизма (одинаковости) графов; определение основных характеристик и свойств графов (векторы степеней, планарность, эйлеровость, гамильтоновость и т.п.); изучение важного частного случая графов – деревьев и их свойств.

За недостатком места о приложениях говорится относительно мало. Однако такие примеры содержатся в литературе.

Данное пособие предназначено в основном для изучения основ именно дискретной математики в узком понимании слова, хотя при этом затронуты основополагающие разделы математической логики – исчисление высказываний и исчисление предикатов. Однако математическую логику настоятельно рекомендуется изучать по более фундаментальным источникам, например, [1, 11,15,16,19,23,29]. В то же время, многие разделы дискретной математики в узком смысле слова в данном пособии никак не отражены, в частности, теория кодирования и криптография, теория алгоритмов и теория сложности вычислений. Это связано, в первую очередь, с ограниченностью отводимого времени для изучения дисциплины в учебных планах у студентов, обучающихся информационным технологиям и использованию вычислительной техники. Курс лекций будет также полезен будущим специалистам по прикладной математике, в частности по математическому и компьютерному моделированию.

Пособие – это существенно поработанный и дополненный вариант пособий [20,21].

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

См. лекции 1-5

ЧАСТЬ ВТОРАЯ. БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ И ИХ МИНИМИЗАЦИЯ

Теорию булевых функций и их минимизации можно считать по праву центральным моментом для математического образования любых инженеров, чья деятельность подразумевает активное использование ЭВМ.

6 ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ. ДВОЙСТВЕННЫЕ И САМОДВОЙСТВЕННЫЕ БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ. ПРИНЦИП ДВОЙСТВЕННОСТИ

7 СОВЕРШЕННЫЕ ДНФ И КНФ. ПОЛИНОМ ЖЕГАЛКИНА. МОНОТОННЫЕ ФУНКЦИИ. ПОЛНОТА. КРИТЕРИЙ ПОЛНОТЫ

8 ПРОБЛЕМА МИНИМИЗАЦИИ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ, ИНДЕКСЫ ПРОСТОТЫ. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ ПОДХОД. СОВЕРШЕННАЯ, ТУПИКОВАЯ, МИНИМАЛЬНАЯ, СОКРАЩЕННАЯ ДНФ

См. лекции 6-9

9 МЕТОДЫ НАХОЖДЕНИЯ СОКРАЩЕННЫХ ДНФ

В этом разделе излагаются различные аналитические методы нахождения сокращённых д.н.ф., которые применяются на первом этапе нахождения тупиковых и минимальных д.н.ф.

9.1 Метод Квайна – исходный вариант

Метод Квайна находит сокращённую д.н.ф., исходя из совершенной. Он основан на двух леммах.

Лемма 9.1 (**склеивание**). $xK \vee \bar{x}K = xK \vee \bar{x}K \vee K$.

Лемма 9.2 (**поглощение**). $xK \vee K = K$.

Упражнение 9.1 *Докажите эти леммы, считая, что K – произвольная булева функция.*

Переходы от левых частей равенств к правым частям, в леммах 9.1 и 9.2, собственно и называются *склеиванием* и *поглощением*, соответственно.

Описание алгоритма. На нечётных шагах алгоритма для всевозможных пар литер x и $\bar{x}$ производим *все* склеивания, при этом д.н.ф. увеличивается. На чётных шагах производим *все* возможные поглощения. Алгоритм заканчивает работу, когда лемма 9.1 далее неприменима.

Пример 9.1 Применим этот алгоритм к функции $f = (1,1,0,1,0,1,0,1)$ – см. также таблицы 7.1, 8.1 и 9.1. Напомним, что значения переменных подразумевается заданными в лексикографическом (алфавитном – см. начало раздела 6) порядке: первым идёт набор (0,0,0), вторым (0,0,1),…, последним – (1,1,1). Составим совершенную д.н.ф. Выбираем в таблице строки, где f равно 1, по каждой такой строке (α,β,γ) выписываем элементарную конъюнкцию $x^{\alpha}y^{\beta}z^{\gamma}$, т. е. при $\alpha = 1$ пишем просто x, при $\alpha = 0$ пишем $\bar{x}$. Тогда первая (№0) строка (0,0,0) таблицы 8.1 даёт импликанту $L_1 = \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}$, вторая (0,0,1) – $L_2 = \bar{x}\,\bar{y}z$, четвёртая (0,1,1) – $L_3 = \bar{x}yz$, шестая (1,0,1) – $L_4 = x\bar{y}z$, восьмая (№7) (1,1,1) – $L_5 = xyz$. Окончательно, получаем

Таблица 9.1

№	x	y	z	f
0	0	0	0	1
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1

$$f = \bar{x}\,\bar{y}\,\underline{\bar{z}} \vee \underline{\underline{\bar{x}}}\,\bar{y}^{(1)}\,\underline{z} \vee \underleftrightarrow{\bar{x}}\,y^{(1)}z \vee \underline{\underline{x}}\bar{y}^{(2)}z \vee \underleftrightarrow{x}y^{(2)}z\,.$$

Здесь выделены подчёркиванием или верхними индексами все пары литер, к которым применима лемма 9.1. Действительно, первая пара – $\bar{z}$ в L_1 и z в L_2 (подчёркнута одной чертой) выделена ввиду того, что после их удаления в L_1 и в L_2, соответственно, получается одинаковый остаток – $\bar{x}\,\bar{y}$. Аналогично, пара $\bar{y}$ в L_2 и y в L_3 (верхний индекс 1) выделена потому, что после их удаления остатки от L_2 и L_3 – одни и те же: $\bar{x}z$. Пара $\bar{x}$ и x подчёркнута двойной чертой в L_2 и в L_4, соответственно, так как удаление этих литер даёт одинаковый «хвост» $\bar{y}z$. Надеемся, что с остальными парами ситуация теперь Вам понятна.

Шаг 1. Применяем лемму 9.1 (склеиваем): $f = L_1 \vee L_2 \vee L_3 \vee L_4 \vee L_5 \vee \bar{x}\,\bar{y} \vee \bar{y}z \vee \bar{x}z \vee yz \vee xz$. Здесь первая добавочная элементарная конъюнкция $\bar{x}\,\bar{y}$ произошла от склеивания L_1 и L_2 по переменной z; вторая $\bar{y}z$ появилась в результате склеивания L_2 и L_4 по переменной x; третью $\bar{x}z$ получили из L_2 и L_3; четвёртую yz – из L_3 и L_5; пятую xz – из L_4 и L_5.

Шаг 2. Более короткая элементарная конъюнкция $\bar{x}\,\bar{y}$ поглощает более длинные импликанты $L_1 = \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}$ и $L_2 = \bar{x}\,\bar{y}z$, в которых она содержится; $\bar{y}z$ поглощает L_2 и $L_4 = x\bar{y}z$; $\bar{x}z$ поглощает L_2 и $L_3 = \bar{x}yz$; $yz - L_3$ и $L_5 = xyz$; $xz - L_4$ и L_5. Остаётся: $f = \bar{x}\,\bar{y} \vee \underline{\bar{y}}z \vee \underline{\underline{\bar{x}}}z \vee \underline{y}z \vee \underline{\underline{x}}z$.

Шаг 3. Опять подчёркнуты две пары литер, имеющие одинаковые «хвосты». Они дают новые одинаковые элементарные конъюнкции z и z, т. е. $f = \bar{x}\,\bar{y} \vee \bar{y}z \vee \bar{x}z \vee yz \vee xz \vee z \vee z$.

Шаг 4. Короткая конъюнкция z поглощает более длинные $\bar{y}z$, $\bar{x}z$, yz, xz. Убираем повтор $z \vee z$. Остаётся $f = \bar{x}\,\bar{y} \vee z$.

Лемма 9.1 далее не применима. Ответ: $\bar{x}\,\bar{y} \vee z$ – сокращённая д.н.ф. функции f. Хотя мы это уже и так знали из примера 8.2.

Упражнение 9.2 *Используя метод Квайна, проверьте правильность нахождения сокращённой д.н.ф. в примере 8.3.*

9.2 Вариация метода Квайна

В «чистом» виде, т.е. так как он описан в предыдущем параграфе и примере 9.1, метод Квайна применять к функциям с четырьмя и более переменными весьма неудобно. Здесь описывается вариант этого метода, позволяющий не выписывать «в буквах» элементарные конъюнкции, а работать с наборами значений переменных, по которым написаны эти конъюнкции. Таким образом, сами импликанты (элементарные конъюнкции) выписываться не будут, а склеивание и поглощение будут применяться непосредственно к двоичным наборам из нулей и единиц.

Итак, вместо того, чтобы выписывать элементарные конъюнкции, а затем составлять из них совершенную д.н.ф., разобьём двоичные наборы, на которых функция равна единице, на группы по количеству единиц в наборе. В первый раз склеивания (т.е. переход в лемме 9.1 слева направо) возможны только *между* наборами из *соседних групп* – см. пример 9.2 ниже. Наборы, участвующие в склеивании будем помечать одинаковыми верхними индексами $^{(i)}$. Результат всех склеиваний на очередном шаге – множество наборов-импликант (элементарных конъюнкций) и, возможно, простые импликанты, не отмеченные индексами. В коротких наборах, получающихся в результате склеек, на месте отсутствующей переменной будем писать знак X – знак пустого места.

П р и м е р 9.2 Результат склеивания набора с двумя единицами 0110 и набора 1110 с тремя единицами – это набор X110, который соответствует импликанте $x_2 x_3 \bar{x}_4$. Таким образом, здесь нужно смотреть не номер переменной, а на позицию, в которой стоят 0 и 1 в наборах.

Далее разобьем полученное множество наборов на группы по месту расположения X и произведем все возможные склеивания *в н у т р и* каждой группы. Получим новое множество наборов-импликант для дальнейшего склеивания и, возможно, простые импликанты, не участвовавшие в склеивании. Склеивание продолжаем до тех пор, пока это возможно.

П р и м е р 9.3 Рассмотрим функцию $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$, заданную номерами 0,1,2,3,5,6,8,10,12,13,14 тех наборов, в которых функция принимает единичное значение (так называемыми *н о м е р а м и к о н с т и т у е н т*), т.е. $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = (0,1,2,3,5,6,8,10,12,13,14)$.

Вычисляем наборы, на которых f равна 1, для этого данные числа записываем в двоичной системе счисления, используя четыре разряда:

$0 = 0000_2$, $1 = 0001$, $2 = 1\cdot2^1 + 0\cdot2^0 = 0010_2$,
$3 = 2^1 + 2^0 = 0\cdot2^3 + 0\cdot2^2 + 1\cdot2^1 + 1\cdot2^0 = 0011_2$,
$5 = 2^2 + 2^0 = 0\cdot2^3 + 1\cdot2^2 + 0\cdot2^1 + 1\cdot2^0 = 0101_2$,
$6 = 2^2 + 2^1 = 0\cdot2^3 + 1\cdot2^2 + 1\cdot2^1 + 0\cdot2^0 = 0110_2$,
$8 = 2^3 = 1\cdot2^3 + 0\cdot2^2 + 0\cdot2^1 + 0\cdot2^0 = 1000_2$,
$10 = 2^3 + 2^1 = 1\cdot2^3 + 0\cdot2^2 + 1\cdot2^1 + 0\cdot2^0 = 1010_2$,
$12 = 2^3 + 2^2 = 1\cdot2^3 + 1\cdot2^2 + 0\cdot2^1 + 0\cdot2^0 = 1100_2$,
$13 = 2^3 + 2^2 + 2^0 = 1\cdot2^3 + 1\cdot2^2 + 0\cdot2^1 + 1\cdot2^0 = 1101_2$,
$14 = 2^3 + 2^2 + 2^1 = 1\cdot2^3 + 1\cdot2^2 + 1\cdot2^1 + 0\cdot2^0 = 1110_2$.

У п р а ж н е н и е 9.3 *Вместо этих вычислений можно было бы составить таблицу значений функции f, подобную таблице 8.5. Проверьте, что таким образом получатся те же наборы, т.е.* $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = (1,1,1,1,0,1,1,0,1,0,1,0,1,1,1,0)$.

Возвращаемся к примеру 9.3. Шаги 1-2. Разбиваем полученные наборы-импликанты на группы по количеству единиц в наборе:

1-я группа – без единиц: 0000; 2-я группа – с одной единицей: $\left\{\begin{matrix}0001\\0010\\1000\end{matrix}\right\}$

3-я группа – с двумя единицами: $\left\{\begin{matrix}0011\\0101\\0110\\1010\\ \\ \end{matrix}\right\}$

4-я группа – с тремя единицами: $\begin{Bmatrix}1100\\1101\\1110\end{Bmatrix}$

Производим всевозможные склеивания между элементами групп (склеиваемые наборы помечаем номерами-индексами склеек в скобках (i) справа от набора):

$0000^{(0),-,(1),(2)}$	$0001^{-,(3),(4),(2)}$	$0011^{-,-,(4),(7)}$	$1101^{(10),-,-,(14)}$
	$0010^{(5),(6),(1),(7)}$	$0101^{(10),(3),-,-}$	$1110^{(11),(12),(13),-}$
	$1000^{(0),(8),(9),-}$	$0110^{(11),(6),-,-}$	
		$1010^{(5),(12),(9),-}$	
		$1100^{-,(8),(13),(14)}$	

Результаты склеек:

(0) $\to$ X000; (1) $\to$ 00X0; (2) $\to$ 000X; (3) $\to$ 0X01; (4) $\to$ 00X1;
(5) $\to$ X010; (6) $\to$ 0X10; (7) $\to$ 001X; (8) $\to$ 1X00; (9) $\to$ 10X0;
(10) $\to$ X101; (11) $\to$ X110; (12) $\to$ 1X10; (13) $\to$ 11X0; (14) $\to$ 110X.

Все наборы участвовали в склейках, поэтому соответствующие им импликанты поглощаются на основании леммы 9.2. Простых импликант на этом этапе нет.

Шаги 3 и 4. Группируем полученные наборы по положению X (символов пустых мест):

$X000^{-,(0),-}$	0X01	$00X0^{(4),-,(5)}$	$000X^{-,-,(7)}$
$X010^{(1),(0),-}$	$0X10^{(2)}$	$00X1^{-,-,(5)}$	$001X^{-,-,(7)}$
X101	$1X00^{-,(3),-}$	$10X0^{(4),(6),-}$	110X
$X110^{(1),-,-}$	$1X10^{(2),(3)}$	$11X0^{-,(6),-}$	
1-я гр. – X на 1-м	2-я гр. – X на 2-м	3-я гр. – X на 3-м	4-я гр. – X на 4-м

Получаем следующие склейки *внутри* групп:

(0) $\to$ X0X0; (1) $\to$ XX10; (2) $\to$ XX10; (3) $\to$ 1XX0;
(4) $\to$ X0X0; (5) $\to$ 00XX; (6) $\to$ 1XX0; (7) $\to$ 00XX.

Обратите внимание склейки-наборы с двумя «пустотами» (с двумя символами X) получились парными: результат склейки (0) совпадает с (4), результат склейки (1) – с (2) и т.д. На этом этапе (шаги 3-4) такая парность – норма, более того, на шагах 5-6 (с тремя пустотами) наборы-склейки должны появляться в трёх экземплярах, на шагах 7-8 – в четырёх и т.д. Если у Вас этого не получилось – ищите ошибку!

Наборы X101, 0X01 и 110X в склейках не участвовали, поэтому соответствующие им импликанты $x_2\bar{x}_3x_4$, $\bar{x}_1\bar{x}_3x_4$ и $x_1x_2\bar{x}_3$ – простые.

Шаги 5 и 6. Разбиваем полученные четыре набора на группы по расположению «пустот» (двух символов X):

1-я гр. X0X0; 2-я гр. XX10; 3-я гр. 1XX0; 4-я гр. 00XX.

Поскольку в каждой группе всего по одному набору, то они не могут склеиваться внутри групп, т.е. лемма 9.1 далее не применима, а соответствующие импликанты $\bar{x}_2\bar{x}_4$, $x_3\bar{x}_4$, $x_1\bar{x}_4$ и $\bar{x}_1\bar{x}_2$ – простые.

В итоге получается, что $\bar{x}_2\bar{x}_4 \vee x_3\bar{x}_4 \vee x_1\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_2\bar{x}_3x_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3x_4 \vee x_1x_2\bar{x}_3$ – сокращённая д.н.ф. функции $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$.

Упражнение 9.4 *Нарисуйте для функции f из примера 8.3 карту Карно, и проверьте, что получится точно такая же сокращённая д.н.ф. с точностью до порядка следования элементарных конъюнкций. Найдите для этой функции тупиковые и минимальные д.н.ф.*

Упражнение 9.5 *Обоснуйте сформулированное выше правило: «На этом этапе (шаги 3-4) склейки-наборы с двумя символами пустого места должны появляться парами. Более того, на шагах 5-6 (с тремя пустотами) наборы-склейки должны появляться в трёх экземплярах, на шагах 7-8 – в четырёх и т.д.». Указание: проанализируйте таблицу 8.7 или, наоборот, если Вы справились с этим заданием, а заполнить таблицу Вам не удалось, то вернитесь теперь к её заполнению.*

9.3 Метод Блейка

Этот метод является обобщением метода Квайна.

Метод Блейка находит сокращённую д.н.ф., исходя из произвольной д.н.ф.. Он основан на двух леммах.

Лемма 9.3 $xK_1 \vee \bar{x}K_2 = xK_1 \vee \bar{x}K_2 \vee K_1K_2$.

Лемма 9.4 $K_1K_2 \vee K_2 = K_2$.

Переходы от левых частей равенств к правым в этих леммах называются *обобщёнными склеиванием* и *поглощением*, соответственно.

Упражнение 9.6 *Докажите леммы 9.3 и 9.4, считая, что K_1 и K_2 – это произвольные булевы функции.*

Описание алгоритма. На нечётных шагах алгоритма для всевозможных пар литер x и $\bar{x}$ производим обобщённое склеивание, при этом д.н.ф. увеличивается. На чётных шагах производим всевозможные обобщённые поглощения, убираем повторы и «пустышки», т.е. элементарные конъюнкции вида $\bar{x}xK$ (почему такие импликанты названы «пустышками»?). Алгоритм заканчивает работу, либо когда лемма 9.3 далее неприменима, либо когда после очередного цикла «раздувание-поглощение» (нечётный-чётный шаг) получается та же д.н.ф., что и до начала цикла.

Пример 9.4 Применим данный алгоритм к функции $g = \bar{x}\bar{y} \vee \bar{y}z \vee y\bar{z}$.

Шаг 1. $g = \bar{x}\underline{\bar{y}} \vee \bar{y}^{(1)}\underline{\underline{z}} \vee \underline{y}^{(1)}\underline{\underline{\bar{z}}}$. В отличие от предыдущего алгоритма одна и та же литера здесь может комбинироваться по нескольку раз. В данном случае это – y из $L_3 = y\bar{z}$. Первый раз она в сочетании с $\bar{y}$ из $L_1 = \bar{x}\,\bar{y}$ даёт склейку $\bar{z}\,\bar{x}$ (здесь в качестве K_1 из леммы 3 выступает фрагмент L_3, равный $\bar{z}$, в качестве K_2 – фрагмент из L_1, равный $\bar{x}$). Второй раз она в сочетании с $\bar{y}$, но уже из $L_2 = \bar{y}z$ даёт склейку $z\bar{z}$. Пара литер z из L_2 и $\bar{z}$ из L_3 даёт склейку $y\bar{y}$. В результате получаем $g = \bar{x}\bar{y} \vee \bar{y}z \vee y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{z} \vee z\bar{z} \vee y\bar{y}$.

Шаг 2. Коротких элементарных конъюнкций здесь нет (при их поиске не забудьте, что $xx = x$), поэтому поглощений не происходит. Повторов тоже нет, а вот $z\bar{z} = y\bar{y} = 0$, поэтому их можно убрать: $g = \bar{x}\bar{y} \vee \bar{y}z \vee y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{z}$.

Шаг 3. $g = \bar{x}\underline{\bar{y}} \vee \bar{y}^{(1)}\underline{\underline{z}}^{(2)} \vee \underline{y}^{(1)}\underline{\underline{\bar{z}}} \vee \bar{x}\bar{z}^{(2)}$. Первые три пары сочетающихся литер ($\bar{y}$ из L_1 и у из L_3, $\bar{y}$ из L_2 и y из L_3, z из L_2 и $\bar{z}$ из L_3) дают уже знакомые нам $\bar{x}\,\bar{z} = L_4$, $z\bar{z}$ и $y\bar{y}$. Четвёртая пара z из L_2 и $\bar{z}$ из L_4 даёт тоже уже имеющуюся $L_1 = \bar{x}\bar{y}$. Таким образом, g = $\bar{x}\bar{y} \vee \bar{y}z \vee y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{z} \vee z\bar{z} \vee$ $\vee\, y\bar{y} \vee \bar{x}\bar{y}$.

Шаг 4. Исключая повторы и «пустышки», получаем g = $\bar{x}\bar{y} \vee \bar{y}z \vee y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{z}$ – ту же самую д.н.ф., что и после шага 2. Поэтому алгоритм заканчивает работу.

Замечания 9.1 Обратите внимание: полученную после шага 4 д.н.ф. мы сравнивали с той, что получилась после шага 2, а не с исходной.

9.2 Последний пример показывает, что название «сокращённая д.н.ф.» обманчиво: мы исходили из короткой д.н.ф., а в результате получили более громоздкую. Происхождение термина объясняется тем, что в таких д.н.ф. внутри элементарных конъюнкций всё уже сокращено.

9.4 Метод Нельсона

Этот метод находит сокращённую д.н.ф., исходя из произвольной к.н.ф. Он основан на свойстве дистрибутивности конъюнкции относительно дизъюнкции: $x \wedge (y \vee z) = xy \vee xz$ (см подраздел 5.2).

Описание алгоритма. Реализация метода проводится в два этапа. На первом этапе алгоритма в данной к.н.ф. производится раскрытие скобок посредством по членного «перемножения» элементарных дизъюнкций, стоящих в каждой скобке. На втором этапе, производятся всевозможные упрощения, а именно, поглощения (лемма 9.4), убираются повторы и «пустышки». На этом алгоритм заканчивает работу.

Обратите внимание – никаких склеек делать не нужно!

Пример 9.5 Применим алгоритм к функции $h = (\bar{x} \vee y)(y \vee z)(x \vee \bar{z})$. Скобки удобнее раскрывать попарно, производя каждый раз упрощения:
$h = (\bar{x}y \vee yy \vee \bar{x}z \vee yz)(x \vee \bar{z}) = (y \vee \bar{x}z)(x \vee \bar{z}) = yx \vee \bar{x}zx \vee y\bar{z} \vee \bar{x}z\bar{z} = yx \vee y\bar{z}$.

У п р а ж н е н и е 9.7 *Обоснуйте адекватность метода Нельсона, т.е. Вам нужно доказать, что после его выполнения в полученной д.н.ф. будут только простые импликанты, и наоборот, каждая простая импликанта рассматриваемой функции обязательно там окажется. У к а з а н и е. Удобнее всего можно сделать это обоснование, применяя геометрические образы.*

У п р а ж н е н и е 9.8 *Дайте геометрическую интерпретацию: а) склейкам в алгоритмах Квайна и Блейка; б) поглощениям в этих методах; в) «пустышкам» в методах Блейка и Нельсона.*

У п р а ж н е н и е 9.9 *Проверьте правильность вычислений в примерах 9.4 и 9.5 геометрическим методом.*

У п р а ж н е н и е 9.10* *Попробуйте разработать вариацию метода Блейка более удобную по форме, чем описана в подразделе 9.3, например, можно попытаться перейти от импликант к соответствующим наборам, как это сделано в подразделе 9.2 для метода Квайна.*

П р е д о с т е р е ж е н и е. Не путайте простоту описания метода (алгоритма) с легкостью его выполнения. Ярчайший пример того, что это – «две большие разницы», даёт метод Нельсона. Его совершенно простое и прозрачное описание вместе с поясняющим примером занимает выше около десятка строчек. Однако попробуйте найти этим методом сокращённую д.н.ф. для следующей функции: $h = \prod_{i=0}^{10} (x_i \vee \overline{x}_{i+2})$, здесь заглавная греческая буква «пи» обозначает конъюнкцию, т.е. в соответствии с обозначениями подраздела 6.2 $h = \bigwedge_{i=0}^{10} (x_i \vee \overline{x}_{i+2}) = (x_0 \vee \overline{x}_2)\cdot(x_1 \vee \overline{x}_3)\cdot\ldots\cdot(x_9 \vee \overline{x}_{11})\cdot(x_{10} \vee \overline{x}_{12})$.